УДК 513.82

ЗАДАЧА РАДОНА НА МНОГОГРАННИКАХ

© С.В. Кольцова, С.В. Поленкова

Koltsova S.V., Polenkova S.V. Problem of Radon on polyhedrons. In the article the problem of restoration of a function in vertices of a polyhedron using the known sums of its values on edges was solved. The criterion of existence of the inverse formula was obtained. In case of existence of the formula the simple algorithm of restoration of function was derived.

Рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а. Пусть в вершинах многогранника задана некоторая функция. Пусть известны суммы пар ее значений на концах каждого ребра. Зная эти суммы, найти, если возможно, исходную функцию.

Эту задачу можно назвать задачей Радона на многогранниках по аналогии с известной задачей Радона из классической интегральной геометрии (см. [1]).

Оказывается, нашу задачу можно свести к задачам о многоугольниках (являющихся гранями многогранника).

З а д а ч а 1. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть на его вершинах задана некоторая функция, которую мы не знаем, поэтому обозначим ее $f = (x, y, z)$.

Пусть $x + y = \alpha,\ y + z = \beta,\ x + z = \gamma$, где α, β, γ – известные нам числа.

Зная функцию $\varphi = (\alpha, \beta, \gamma)$ на сторонах треугольника ABC, найти, если это возможно, функцию f на его вершинах.

Эта задача сводится к системе трех уравнений с тремя неизвестными, решая которую, получаем

$$x = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma),$$

$$y = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma),$$

$$z = \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma).$$

Ответ можно сформулировать на геометрическом языке. Именно: для того, чтобы восстановить значение функции f в произвольной вершине треугольника, достаточно, выйдя из этой вершины, обойти треугольник по контуру, при этом, чередуя знаки, складывать значения функции φ на сторонах, взяв первое слагаемое со знаком плюс. Полученное число разделить пополам, это и будет значением f в данной вершине.

З а д а ч а 2. Рассмотрим квадрат ABCD. Пусть $f = (x, y, z, t)$ – произвольная функция на вершинах квадрата. Пусть известно, что $x + y = \alpha,\ y + z = \beta,$ $z + t = \gamma,\ x + t = \delta$. Зная функцию $\varphi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, восстановить f, если это возможно.

Рассматривая эту систему, замечаем, что не для всякой функции φ задача имеет решение. Для существования решения необходимо, чтобы $\alpha - \beta + {}$ ${} + \gamma - \delta = 0$. В этом случае система будет иметь бесконечно много решений, так как независимых уравнений в ней останется три, а этого недостаточно для однозначной разрешимости системы с 4-мя неизвестными. Другими словами, в случае квадрата функция f не восстанавливается однозначно по функции φ.

З а д а ч а 3. Рассмотрим произвольный многоугольник. Пусть f – функция на его вершинах. Пусть известны суммы ее значений на сторонах, то есть функция φ. Зная φ, восстановить f, если это возможно.

Р е ш е н и е. Выделим два случая: многоугольник с нечетным числом сторон и многоугольник с четным числом сторон.

1) Пусть число сторон (вершин) многоугольника равно $n = 2k - 1$. Перенумеруем вершины многоугольника: 1, 2, … $2k - 1$, обходя его по контуру. Обозначим функцию f на вершинах $(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1})$. Пусть известны числа на сторонах

$$\alpha_i = x_i + x_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, 2k-2,$$
$$\alpha_{2k-1} = x_1 + x_{2k-1}.$$

Для восстановления значения x_1 функции f найдем альтернированную (знакочередующуюся) сумму, обходя многоугольник по контуру. Получим

$$\sum_{i=1}^{2k-2} (-1)^{i+1} \alpha_i + \alpha_{2k-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{2k-2} (-1)^{i+} (x_i + x_{i+1}) + x_1 + x_{2k-1} = 2x_1.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2k-2} (-1)^{i+1} \alpha_i + \alpha_{2k-1} \right).$$

Замечание. Для восстановления значения x_j надо обход по контуру начинать с вершины, имеющей номер j. Первое слагаемое, взятое со знаком плюс, альтернированной суммы будет отвечать стороне, выходящей из этой вершины.

2) Пусть число сторон (вершин) многоугольника равно $n = 2k$. Введя обозначения, аналогичные пункту 1), получим $f = (x_1, x_2, ..., x_{2k})$,

$$\begin{cases} \alpha_i = x_i + x_{i+1},\ i = 1,2,...,2k-1 \\ \alpha_{2k} = x_1 + x_{2k}. \end{cases} \tag{1}$$

Найдем альтернированную сумму

$$\sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^{i+1} \alpha_i - \alpha_{2k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^{i+1} (x_i + x_{i+1}) - x_{2k} - x_1 = 0.$$

В итоге получили уравнение, которому с необходимостью должны удовлетворять координаты вектора φ, чтобы существовало решение системы (1).

Как и в случае с квадратом независимых уравнений в системе оказалось меньше, чем неизвестных, и, следовательно, однозначно восстановить функцию f по φ нельзя.

Теперь рассмотрим нашу задачу для многогранников. Возьмем сначала правильный многогранник: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр или додекаэдр. Обозначим b – множество его вершин, p – множество ребер, k – множество граней, F – пространство функций на вершинах, Φ – пространство функций на его ребрах. Пусть $f \in F$ – произвольная функция на множестве вершин. Определим преобразование $I : F \to \Phi$, относящее к функции $f \in F$ функцию $If \in \Phi$ по следующему правилу:

$$If(y) = \sum_{x: x \in y} f(x),$$

где x – вершина, y – ребро.

Другими словами, значение функции If на ребре равно сумме значений функции f на его концах. Нашу задачу теперь можно сформулировать так:

З а д а ч а 4. Для любой вершины правильного многогранника и любой функции $f \in F$ восстановить, если это возможно, значение f в этой вершине, зная функцию $If \in \Phi$, то есть найти формулу обращения.

Ответ сформулируем в виде теоремы:

Т е о р е м а 1. *Для любого правильного многогранника, кроме куба, существует формула обращения. Именно, для восстановления значения функции f в вершине тетраэдра, октаэдра, икосаэдра или додекаэдра, достаточно взять любую грань, содержащую эту вершину, проходя по ее ребрам (начиная с ребра, выходящего из этой вершины) найти альтернированную сумму значений If, взяв первое слагаемое со знаком плюс. Полученное в итоге число разделить пополам. Для куба формулы обращения не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим тетраэдр, октаэдр, икосаэдр или додекаэдр. Заметим, что все грани этого многогранника либо треугольники, либо пятиугольники (в случае додекаэдра), то есть многоугольники с нечетным числом сторон. Поэтому задача сводится к уже рассмотренному ранее случаю многоугольников. Именно, для восстановления значения функции f в вершине тетраэдра, октаэдра, икосаэдра или додекаэдра, достаточно взять любую грань, содержащую эту вершину, пройти по ее ребрам, начиная с ребра, выходящего из этой вершины, складывая значения If, при этом, чередуя знаки слагаемых и, взяв первое слагаемое со знаком плюс, затем полученное число разделить пополам. Таким образом, формула обращения для указанных многогранников существует.

Рассмотрим теперь куб. У него нет граней с нечетным числом ребер, поэтому рассмотренный выше способ восстановления f здесь не годится. Докажем, что для куба вообще нельзя однозначно восстановить функцию f по функции If. Идея доказательства состоит в следующем: надо показать, что отображение $I : F \to \Phi$ пространства функций F на вершинах куба в пространство функций Φ на его ребрах, определенное выше, имеет ненулевое ядро, то есть разные функции f могут переходить в одну функцию If.

Выбросим какую-нибудь грань куба, сохранив ее вершины и ребра. При помощи гомеоморфизма (непрерывной деформации) отобразим получившийся куб без одной грани на плоскость так, чтобы вершины и ребра оставшихся граней оказались внутри четырехугольника, являющегося границей выброшенной грани. Оставив прежние названия: вершина, ребро, грань за их образами, перенумеруем произвольным образом вершины полученной плоской конфигурации. Ребра перенумеруем специальным образом: сопоставим самые большие номера в порядке убывания 12, 11, 10, 9 ребрам внутренней грани при обходе ее, например, против часовой стрелки. Затем перенумеруем таким же образом ребра какой-нибудь соседней грани (имеющей общее ребро с данной) и т. д. При этом все ребра выкинутой грани автоматически получат нумерацию. Рассмотрим произвольную грань куба. Пусть f имеет значения x,y,z,t в ее вершинах, тогда значения функции If на ребрах равны $x+y,\ y+z,\ z+t,\ x+t$. Отсюда получим

$$(x+y)-(y+z)+(z+t)-(x+t)=0.$$

Таким образом, для функции If альтернированная сумма ее значений на последовательных ребрах любой грани равна нулю (см. случай квадрата).

Составим систему необходимых условий, которым должны удовлетворять координаты вектора $\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{12})$ из Ф, чтобы φ принадлежал образу отображения I:

$$\begin{cases} \alpha_{12} - \alpha_{11} + \alpha_{10} - \alpha_9 = 0 \\ \alpha_9 - \alpha_8 + \alpha_7 - \alpha_6 = 0 \\ \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_{12} = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_{11} = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_8 - \alpha_{10} = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_7 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Запишем матрицу системы (2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Если сложить все строки матрицы (3) и записать их на месте последней строки, то она будет состоять из одних нулей. Оставшиеся пять строк матрицы, очевидно, линейно независимы, так, если, например, переставить их в обратном порядке, то матрица будет иметь ступенчатый вид. Следовательно, ранг матрицы равен 5, а среди уравнений системы (2) независимыми являются 5. Таким образом, размерность пространства решений системы (2) равна 12 – 5 = 7. Очевидно, что образ отображения $I: F \to \Phi$ принадлежит этому 7-мерному пространству. Так как $\dim F = 8$, $\dim \mathrm{Im} I \le 7$, то отображение I имеет ненулевое ядро. Следовательно, восстановить однозначно функцию f в вершинах куба нельзя.

■

Полученную теорему можно обобщить. Очевидно, что для ее справедливости правильность многогранника не нужна. Рассмотрим произвольный многогранник. Обозначим, как и раньше, число его вершин b, число ребер p, число граней k. Как известно, для правильного многогранника имеет место формула Эйлера: $b - p + k = 2$. Убедиться в этом можно непосредственной проверкой. На самом деле указанная формула имеет место для более широкого класса многогранников. Например, для многогранника, гомеоморфного сфере, каждая грань которого гомеоморфна кругу. Будем называть многогранник, для которого справедлива формула Эйлера, многогранником Эйлера. В прежних обозначениях поставим нашу задачу для многогранника Эйлера.

З а д а ч а 5. Восстановить, если это возможно, произвольную функцию $f \in F$, заданную на вершинах некоторого многогранника Эйлера, зная ее «интегралы» If (то есть суммы значений функции f на концах ребра).

Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы существовала формула обращения для многогранников Эйлера, необходимо и достаточно, чтобы он содержал хотя бы одну грань с нечетным числом ребер.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. (достаточность). Рассмотрим многогранник Эйлера, содержащий хотя бы одну грань с нечетным числом ребер. Обозначим функцию в вершинах многогранника $f = (x_1, x_2, ..., x_b)$. Значения функции If на ребрах многогранника обозначим соответственно $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ (предварительно вершины и ребра многогранника мы перенумеровали). Попробуем восстановить значение x_i функции f в произвольно выбранной вершине с номером i. Очевидно, найдется путь по ребрам многогранника из вершины с номером i до грани с нечетным числом ребер. Будем двигаться по этому пути, попеременно складывая и вычитая значения If на ребрах. Дойдя до грани с нечетным числом ребер, продолжим наши действия. Обойдя грань, вернемся по старому пути в вершину с номером i, все время чередуя знаки. Заметим, что из-за нечетности числа ребер у грани, значение функции If на ребрах, соединяющих вершину i с нашей гранью, на обратном пути нам придется брать с теми же знаками, что и первоначально. Поэтому после возвращения в вершину с номером i, получим у нашей знакочередующейся суммы значение, равное $2x_i$. Отсюда находим x_i.

Если все грани многогранника имеют четное число ребер, то аналогичное проведенному рассуждение не позволяет восстановить функцию, так как альтернированная сумма оказывается равной нулю. Покажем, что наличие у многогранника грани с нечетным числом ребер не только достаточно, но и необходимо для восстановления f.

2. (необходимость). Доказательство необходимости аналогично рассмотренному в теореме 1 случаю куба. Надо показать, что отображение $I: F \to \Phi$ имеет ненулевое ядро.

Предположим, что у некоторого многогранника Эйлера все грани имеют четное число ребер. Выбросим какую-нибудь из них и оставшуюся часть многогранника гомеоморфно отобразим на плоскость так, чтобы образы вершин и ребер оставшихся граней оказались внутри криволинейного многоугольника, являющегося границей выброшенной грани. В дальнейшем образы вершин, граней и ребер будем для краткости называть просто вершины, грани, ребра. Как было отмечено выше (см. задачу 3), при обходе граней с четным числом ребер и чередовании знаков слагаемых при сложении значений функции If на ребрах, получаем в сумме ноль. Следовательно, в p-мерном пространстве Φ функций на ребрах многогранника функции If принадлежат подпространству, выделяемому k соотношениями (по числу граней многогранника). Возможно, функции из образа оператора I удовлетворяют еще какимнибудь соотношениям, но для достижения цели нам достаточно показать, что из полученных k соотношений по крайней мере $(k - 1)$ независимо. Для этого сделаем следующее. Рассмотрим какую-нибудь грань, не имеющую общих вершины или ребра с выкинутой гранью. Перенумеруем ее ребра в обратном порядке, начиная с большего номера, обходя грань, например, против часовой стрелки, именно: $p, p-1, p-2, ..., p-2k-1$, где p – число ребер многогранника. Далее аналогичным образом нумеруем ребра соседней с рассмотренной гранью, выбирая, если это возможно, сначала такие соседние грани, которые не выходят на границу выкинутой грани. В последнюю очередь таким же образом нумеруем ребра тех граней, которые являются соседними для выкинутой грани. Ребра выкинутой грани нумеровать не придется, так как они уже будут перенумерованы (см. случай куба в теореме 1).

Пусть $\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ – функция из пространства Φ. Для того чтобы она принадлежала $\mathrm{Im} I$, необходимо, чтобы α_i удовлетворяли системе из k уравнений, аналогичных уравнениям системы (2). Каждое уравнение такой системы получается, если обходить соответствующую грань по контуру и, чередуя знаки, складывать α_i, которые отвечают ее ребрам. Можно выбрать направление обхода граней фиксированным, например, против часовой стрелки. В силу ориентированности многогранника Эйлера при составлении уравнений системы координату α_i, отвечающую общему ребру двух соседних граней, можно брать в этих уравнениях с противоположными знаками (см. случай куба в теореме 1). Первое уравнение системы свяжем с гранью, номера ребер которой самые большие. Последующие уравнения системы будем выписывать в том порядке, в котором выбирали грани для нумерации ребер. Если записать матрицу полученной системы, то первая ее строка начнется с нулей, а в конце ее будет стоять равное количество 1 и –1. Каждая новая строка, кроме последней, будет содержать хотя бы на один нуль меньше в своем начале, так как в любое новое уравнение будут входить α_i со все меньшими номерами *i*. В началах предпоследней и последней строк будут стоять 1, либо –1. Если сложить все строки матрицы, то получится строка, состоящая из нулей. Таким образом, строки матрицы линейно зависимы. Очевидно, что первые (*k* – 1) строк – линейно независимы. Следовательно, у нас имеются не менее (*k* – 1) независимых соотношений, а это значит, что

$$\dim \operatorname{Im} I \le p - k + 1 = b + k - 2 - k + 1 = \\ = k - 1 = \dim F - 1,$$

следовательно, $\dim Ker\, I > 0$ и функцию *f* восстановить однозначно нельзя.

■

С л е д с т в и е. *Многогранник Эйлера не может иметь только одну грань с нечетным числом ребер.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, что он имеет ровно одну такую грань. Тогда по доказанной теореме этого достаточно, чтобы для него существовала формула обращения. В то же время, если выкинуть эту грань, то повторяя доказательство необходимости условия теоремы, получаем, что формулы обращения для нашего многогранника не существует. Полученное противоречие показывает, что наше предположение не верно и у многогранника должна быть еще хотя бы одна грань с нечетным числом ребер.

■

На самом деле легко доказывается более сильное утверждение.

У т в е р ж д е н и е. Если у многогранника Эйлера имеются грани с нечетным числом ребер, то их четное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m_1, m_2, ..., m_k$ – количества ребер у граней произвольного многогранника Эйлера. Так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, то всего ребер

$$p = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_k}{2}.$$

Число *p* – целое, а, значит, сумма чисел в числителе четная. Это может быть только в том случае, если количество нечетных чисел среди них равно четному числу.

■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кольцова С.В., Поленкова С.В.* Интегральная геометрия на *n*-мерном симплексе // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2004. Т. 9. Вып. 3. С. 316-321.

БЛАГОДАРНОСТИ: Авторы выражают благодарность проф. М.И. Граеву за постановку задачи.

Поступила в редакцию 21 ноября 2005 г.